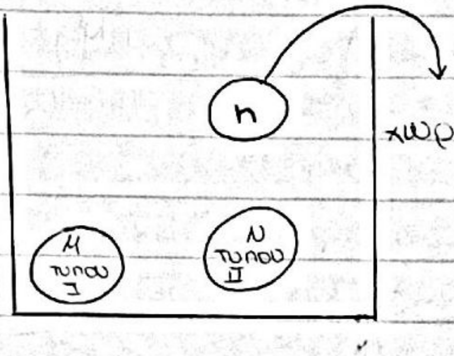
Μαθημα 12ο 10/11/2016

Πιθανοτητες

Υπεργεωμετρικη Κατανομη



χωρις επανατοποθετηση

τ.μ X παριστά τα τυπου I στα n που επιλεχτηκαν

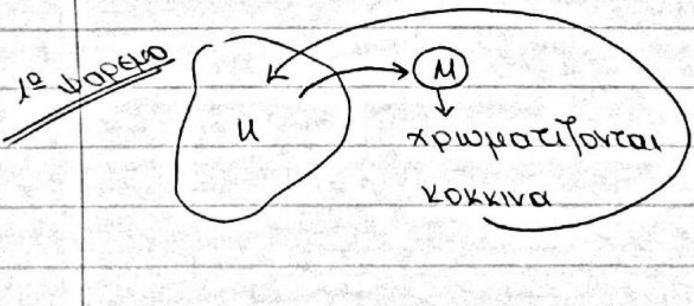
$$p_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N}{n-x}}{\binom{M+N}{x}}$$

$X \sim Hg(M, N, n)$

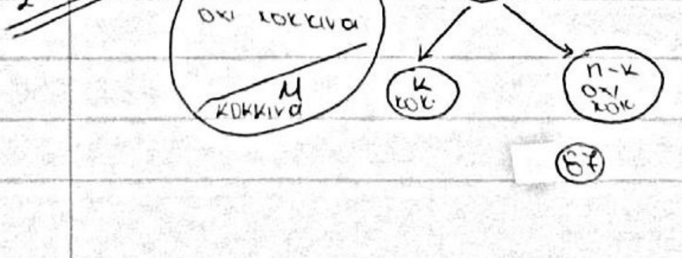
Μοντελα πιανω-ξαναπιανω (capture-recapture)

Παραδειγμα [Εκτιμηση αγνωστου αριθμου ψαριων μιας λιμνης]

Λιμνη → Αγνωστος αριθμος u-ψαριων



$u = ?$



Εστω X πληθος σημαδεμενων ψαριων στα n που ξαναψαρεψα

Τοτε $X \sim Hg(M, u-M, n)$

$$P(X=k) = P\left(\begin{matrix}\text{Στα } n \text{ τα } k \\ \text{να ειναι σημαδεμενα}\end{matrix}\right) = p_X(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{u-M}{n-k}}{\binom{u}{n}} \sim 1$$

Αναζητω το u τετοιο ωστε η $p_X(k)$ να μεγιστοποιειται

Το u που μεγιστοποιει την $p_X(k)$ ειναι $u = \left[\frac{nM}{k}\right]$

Προταση

Εστω τ.μ $X \sim Hg(M, N, n)$ Αν $M, N \to \infty$ και $\frac{M}{M+N} \to p$

με $0<p<1$, τοτε:

$$\lim_{M,N\to\infty} p_X(x) = \binom{M}{N} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$

—

Γεωμετρικη Κατανομη

Θεωρω τ.π που

(Γ1) Αποτελειται απο μια ακολουθια επαναληψεων μιας στοιχειωδους διαδικασιας

(Γ2) Καθε επαναληψη $\begin{cases} \to E \\ \to A \end{cases}$

Μας ενδιαφερει το πληθος X των επαναληψεων μεχρι να εμφανιστει για 1η φορα E

Η X ειναι τ.μ

Τιμες της τ.μ X : $x = 1, 2, \ldots$

$$p_X(x) \overset{op}{=} P(X=x) = P\left(\begin{matrix}\text{Να χρειαστω } x\text{-επαναληψεις} \\ \text{μεχρι την 1η } E\end{matrix}\right) =$$

$$= P(\underbrace{AA\ldots A}_{x-1}E) \overset{\text{Ανεξ.}}{=} \underbrace{P(A)\cdot P(A)\cdot \ldots \cdot P(A)}_{x-1} \cdot P(E) = p(1-p)^{x-1} = pq^{x-1}$$

$x = 1, 2, \ldots$

(Γ3) Οι επαναληψεις ειναι ανεξαρτητες

(Γ4) Η $P(E)$ παραμενει αμεταβλητη απο επαναληψη σε επαναληψη και ιση με $p=P(E)$, $0<p<1$ οποτε $q=P(A)=1-p$

Ειναι η $p_X(x)=p\cdot q^{x-1}$, $x=1,2,\dots$ σ.π?

① $p_X(x)\geq 0$, $\forall x=1,2,\dots$ προφανως ισχυει

② $\sum_{x=1}^{\infty} p_X(x)=\sum_{x=1}^{\infty} p\,q^{x-1}=p\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1}=p\sum_{r=0}^{\infty} q^{r}\overset{(*)}{=}p\cdot\frac{1}{1-q}=p\cdot\frac{1}{p}=1$

(*) Αθροισμα απειρων ορων φθινουσας γεωμετρικης προοδου:

$$\sum_{r=0}^{\infty} a^{r}=\frac{1}{1-a},\quad |a|<1$$

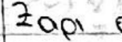
Ορισμος

Η τ.μ X λεγεται γεωμετρικη με παραμετρο p $(0<p<1)$ αν το συνολο των δυνατων της τιμων ειναι $x=1,2,\dots$ και η σ.π της X δινεται απο τον τυπο:

$$p_X(x)=p\,q^{x-1},\quad x=1,2,\dots$$

Συμβολισμος: $X\sim Geo(p)$

Παραδειγμα

Ζαρι ριχνεται επανειλημμενα. Ποια η πιθανοτητα το πρωτο  : α) να εμφανιστει στην $6^η$ ριψη; β) Μετα την $6^η$ ριψη;

απαντηση

$E=$ {να ερθει  σε οποιαδηποτε ριψη}

$X=$ το πληθος των ριψεων μεχρι να εμφανιστει για $1^η$ φορα E, δηλ μεχρι να εμφανιστει για $1^η$ φορα

$X\sim Geo(p=P(E)=1/6)$

α) $P(X=6) = p_X(6) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{6-1} = \ldots = 0{,}067$

β) $P(X>6) = P(X=7) + P(X=8) + \ldots$ ομως δεν μπορω να βρω αυτη την πιθανοτητα αρα παιρνω:

$$P(X>6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - \sum_{x=1}^{6} p_X(x) = 1 - \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \ldots$$

Προταση {Ιδιοτητα της Αμνησιας της Γεωμετρικης Κατανομης}

Εστω $X \sim Geo(p)$ και εστω $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ Τοτε

$P(X>m+n \mid X>m) = P(X>n)$

[οχι αποδειξη]

Παραδειγμα

P(να πετυχει) = 0,1 καθε φορα που σημαδευει.

P(να πετυχει το στοχο μετα απο 5 προσπαθειες αν έχει ηδη προσπαθησει ανεπιτυχως περισσοτερες απο 3 φορες)

απαντηση

Εστω E = {να πετυχει το στοχο} καθε φορα που σημαδευει

Εστω X τ.μ. παριστα το πληθος των φορων που θα σημαδευει μεχρι να πετυχει για 1η φορα στοχο (μεχρι την 1η E)

$X \sim Geo(p = P(E) = 0{,}1)$

$$P(X>5 \mid X>3) = \frac{P(X>5 \text{ και } X>3)}{P(X>3)} = \frac{P(X>5)}{P(X>3)} = \frac{1-P(X\leq 5)}{1-P(X\leq 3)} =$$

$$= \frac{1 - \sum_{x=1}^{5} 0{,}1\cdot(0{,}9)^{x}}{1 - \sum_{x=0}^{3} (0{,}1)\cdot(0{,}9)^{x-1}}$$

μπορω να το υπολογισω πιο ευκολο με την ιδιοτητα αμνησιας.

Συνεπως απο την ιδιοτητα αμνησιας εχουμε:

$$P(X>5 \mid X>3) = P(X>3+2 \mid X>3) = P(X>2) = 1 - P(X\le 2) =$$
$$= 1 - p_X(1) - p_X(2) = \dots$$

Αρνητικη Διωνυμικη Κατανομη ή Κατανομη Pascal

Μας ενδιαφερει το πληθος X των επαναληψεων μεχρι να εμφανιστει για κ-φορα E, $\kappa = 1, 2, \dots$

Τιμες της X, $x = \kappa, \kappa+1, \dots$

$$p_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X=x) = P\begin{pmatrix} \text{Η } \kappa\text{-στη } E \text{ εμφανιζεται} \\ \text{στην } x\text{-στη επαναληψη} \end{pmatrix} =$$

$$= P\begin{pmatrix} (\kappa-1)\ E \text{ στις } (x-1) \text{ επαναληψεις} \\ \text{και } E \text{ στη } x\text{-στη επαναληψη} \end{pmatrix} =$$

$$= P(\underbrace{EA\dots E}_{(\kappa-1)E}\ \underset{\substack{x\text{-στη} \\ \text{επαναληψη}}}{E} \text{ ή } \underbrace{AE\dots E}_{(x-1)E}\ \underset{x\text{-στη}}{E} \text{ ή } \dots) =$$

Εχω υποθεσει ανεξ.

$$= \binom{x-1}{\kappa-1,\ x-1-(\kappa-1)} \cdot P(\underbrace{EA\dots E}_{(\kappa-1)E}\ \underset{x\text{-στη}}{E}) = \binom{x-1}{\kappa-1} \underbrace{P(E)\cdot P(A)\cdot \dots \cdot P(E)\cdot P(E)}_{\substack{(\kappa-1)\ P(E) \text{ και} \\ (x-1)-(\kappa-1) = x-\kappa\ P(A)}} =$$

$$\overset{(\Gamma 4)}{=} \binom{x-1}{\kappa-1} p^{\kappa-1} \cdot (1-p)^{x-\kappa} \cdot p = \binom{x-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{x-\kappa}, \quad x = \kappa, \kappa+1, \dots$$

⊕ Είναι η p_X σ.π?

Είναι γιατι $p_X(x) \ge 0$ και μπορει να δειχθει οτι
$$\sum_{x=\kappa,\kappa+1,\dots} p_X(x) = 1$$

Ορισμος

Η τ.μ X λεγεται αρνητικη διωνυμικη αν το συνολο τιμων της X ειναι $x=\kappa,\kappa+1,\dots$ $\kappa \in \mathbb{N}-\{0\}$ και η σ.π της X ειναι:

$$p_X(x)=\binom{x-1}{\kappa-1}p^{\kappa}\cdot q^{x-\kappa}, \quad x=\kappa,\kappa+1,\dots \text{ και } q=1-p, \ 0<p<1$$

→ παραμετροι

Συμβολισμος: $X \sim NB(\kappa,p)$

Παρατηρηση

Αν $\kappa=1$, τοτε $N(1,p)=Geo(p)$

Παραδειγμα

Ζαρι ριχνεται επανειλημμενα. Ποια η πιθανοτητα η $4^{η}$ εμφανιση αρτιου αποτελεσματος να συμβει στη $10^{η}$ ριψη;

απαντηση

$E=\{$αρτιο αποτελεσμα σε οποιαδηποτε ριψη$\}$

τ.μ X παριστά πληθος ριψεων μεχρι την $4^{η}$ E

$X \sim NB(\kappa=4, p=P(E)=1/2)$

Αρα $P(\dots)=P(X=10)=p_X(10)=\binom{10-1}{4-1}\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-4}=$

↳ $1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$=\binom{9}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Ασκηση Δ.6.1

Ποια η πιθανοτητα μεταξυ 5 οικογενειων με εξι παιδια η καθε μια τουλαχιστον τρεις οικογενειες να εχουν τεσσερα ή περισσοτερα κοριτσια; (*)

4 ή περισσοτερα δηλ 4,5,6

Λυση

Εστω $E = \{$μια οποιαδηποτε οικογενεια απο τις 5 να εχει τεσσερα ή περισσοτερα κ$\}$

Εστω τ.μ X παριστά πληθος οικογενειων στα πεντε παιδια που εχουν τεσσερα ή περισσοτερα κοριτσια

$X \sim B(n=5,\ p=P(E))$

$p_x(x) = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x}, \quad x = 0,1,2,\dots,5$

$P(*) = P(X \geq 3)$

κανω 6 φορες την ιδια δοκιμη

Δηλαδη θελω $p = P\left(\begin{array}{l}\text{μια οικογενεια με 6 παιδια} \\ \text{να εχει 4 ή περισσοτερα κοριτσια}\end{array}\right)$

Εστω 6 επαναληψεις δηλ ελεγχος ως προς το φυλο καθε παιδιου οικογ. με 6 παιδια

Εστω $E = \{$κοριτσι$\}$

Εστω Y τ.μ παριστά πληθος των E στους 6 ελεγχους ή στις 6-επαναληψεις. $Y \sim B(n=6,\ p=P(E)=1/2)$

$$p = P(E) = P(Y \geq 4) = \sum_{y=4,5,6} \binom{6}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-y} = \frac{11}{32}$$